Colles de Maths - semaine 11 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application qui à $f \in E$ associe la fonction définie par

$$T(f) : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 2 Soit E l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, bornées. Soit T l'application qui à $u \in E$ associe la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 3 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients réels strictement positifs telle que

$$\forall i \in \{1,...,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et que l'espace propre associé (sur $\mathbb{C}$) est une droite.
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1.
3. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$. Déterminer les valeurs propres de la comatrice de A en fonction des λ_i.

Exercice 5 Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

(ii) Le polynôme minimal de u est sans facteur carré, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $r \geqslant 1$ et $P_1,...,P_r$ des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts tels que $P = \lambda\, P_1 \ldots P_r$.

Exercice 6 Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est irréductible sur K.

Exercice 7 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$. Montrer que les matrices de la forme

$$C_{a_0,\ldots,a_{n-1}} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

avec $a_0,...,a_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont simultanément diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer leurs valeurs propres.